Erinnerung:

Thm (Hauptachsentransformation) Für $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ ist äquivalent:

1) A ist symmetrisch
2) $\exists$ Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}(n,n)$ und orthogonale Matrix $O \in \mathrm{Mat}(n,n)$ (also $O^{-1} = O^T$) mit
$$A = O \cdot D \cdot O^{-1}.$$
3) $\exists$ Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.

$\ulcorner$ 3) $\Rightarrow$ 2): Gegeben $\mathcal{B}$, setze $O = \mathcal{W}_{\mathcal{B}}^{-1}$.

2) $\Rightarrow$ 3): Gegeben O setze $\mathcal{B} = \{\text{Spalten von } O\}$.

2) $\Rightarrow$ 1): Es gilt
$$\begin{aligned} A^T = (O \cdot D \cdot O^{-1})^T &= (O^{-1})^T \cdot D^T \cdot O^T \\ &= (O^T)^T \cdot D \cdot O^{-1} \\ &= O \cdot D \cdot O^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

1) $\Rightarrow$ 2): Rest der Vorlesung. $\lrcorner$

Es ist nicht einmal klar, dass A einen Eigenwert hat!

Wir brauchen ein Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen (weil λ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda \cdot E_n - A$ nicht invertierbar).

Erinnerung: $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ ist invertierbar $\iff \dim(\mathrm{im}(A)) = n$

<u>Idee</u>: Sei $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel. Dann gilt

$$A \in \mathrm{Mat}(n,n) \text{ invertierbar} \iff \mathrm{Vol}_n(A \cdot I^n) \neq 0$$

wo $A \cdot I^n = \{A \cdot x \in \mathbb{R}^n \mid x \in I^n\}$ und Vol_n ist das "n-dimensionale Volumen", also

Vol_1 = Länge

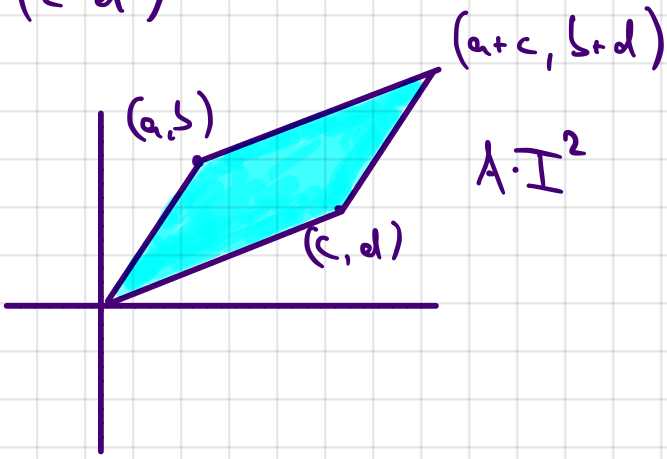
Vol_2 = Flächeninhalt

Vol_3 = Volumen usw.

Es ist ja $\mathrm{Vol}_n(A \cdot I^n)$ "offenbar" genau dann $\neq 0$ wenn $A \cdot I^n$ nicht in einem $n-1$-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ enthalten ist.

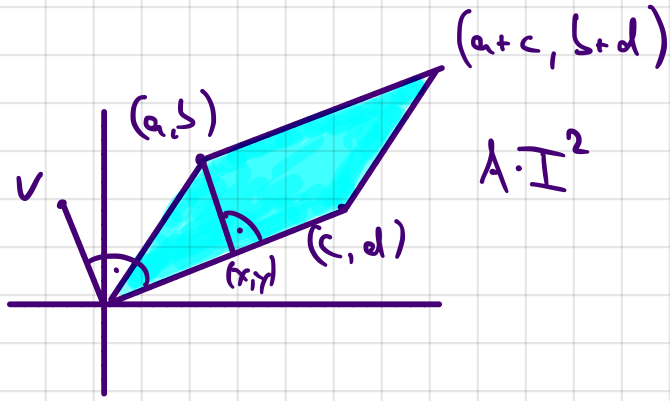
<u>Bsp</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$



and A not invertible means that $A \cdot I^2$ is a line (or a point if $A = 0$).

Zur Berechnung von $\mathrm{Vol}(A\cdot I^2)$ müssen wir die Länge von $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v$ bestimmen. Also dieser Vektor ist gerade durch das Gram-Schmidt Verfahren gegeben:



$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} -$$

Der Flächeninhalt F erfüllt also

$$F^2 = |v|^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right|^2 = \langle v, v \rangle (c^2+d^2)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle (c^2+d^2)$$

$$= \left(\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \left(\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2} \left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle \right) \cdot (c^2+d^2)$$

$$= \left(a^2+b^2 - \frac{2(ac+bd)^2}{c^2+d^2} + \frac{(ac+bd)^2}{c^2+d^2} \right) (c^2+d^2)$$

$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2$$

$$= \cancel{a^2c^2} + b^2c^2 + a^2d^2 + \cancel{b^2d^2} - \cancel{a^2c^2} - 2abcd - \cancel{b^2d^2}$$

$$= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (ad-bc)^2.$$

Also A invertierbar $\iff ad-bc \neq 0$

und $\mathrm{Vol}_2(A\cdot I^2) = |ad-bc|$.

Test:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{a\neq 0}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \underbrace{d-\frac{bc}{a}}_{=\frac{ad-bc}{a}} & -c/a & 1 \end{array}\right) \overset{d\neq \frac{bc}{a}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \qquad \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{-c}{ad-bc}\right) = \frac{(ad-bc)+bc}{a(ad-bc)} = \frac{d}{ad-bc}$$

Also $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, direkte Rechnung zeigt, dass das auch für $a=0$ stimmt.

Man nennt $ad-bc$ die <u>Determinante</u> von A.

Sie ist eine Art orientierter Flächeninhalt.

Für beliebiges n hat man nun:

Thm Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Funktion $d_y : \mathrm{Mat}(n,n) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $d_y(E_n) = y$
2) $\lambda \cdot d_y(A) = d_y(A_1, \dots, \lambda \cdot A_k, \dots, A_n) \quad \forall\, 1 \le i \le n, \lambda \in \mathbb{R}$
3) $d_y(A) = d_y(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i + \lambda A_k, A_{i+1}, \dots, A_n) \quad \forall\, i \ne k, \lambda \in \mathbb{R}$
4) $d_y(A) = -d_y(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, \dots, A_n) \quad \forall\, 1 \le i \le n$

Def Die Funktion d_1 wird $\det : \mathrm{Mat}(n,n) \to \mathbb{R}$ geschrieben und heißt <u>Determinantenfunktion</u>.

Cor Für jeden Parallelepiped $I \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathrm{Vol}_n(A \cdot I) = \det(A) \cdot \mathrm{Vol}_n(I).$$

Cor $\quad A$ ist invertierbar $\iff \det(A) \ne 0$.

$\ulcorner$ Uniqueness of d_y: Ist d_y' eine zweite Funktion mit obigen Eigenschaften, so gilt $d_y(A) = 0 = d_y'(A)$. für nicht-invertierbares A. Ist A invertierbar so kann man mittels Spaltenoperation (ganz analog zum Gauß-Jordan-Algorithmus) die Matrix in E_n überführen. Dabei ändert sich der Wert d_y und d_y' wegen 2) - 4) auf gleiche Weise.

Wegen 1) stimmen sie dann überein. ↲

Aus der Eindeutigkeit folgt direkt

<u>Cor</u> 1) $\det(A\cdot A') = \det(A)\cdot\det(A')$

2) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

3) $\det(AB) = \det(BA)$

4) $\det(A) = \det(A_{BB})$ für jede Basis B

Insbesondere haben ähnliche Matrizen gleiche Determinante.

⌜ Man prüft leicht, dass für fixes A die Abbildungen

$$A' \mapsto \det(A\cdot A') \qquad \text{und} \qquad A' \mapsto \det(A)\cdot\det(A')$$

die definierenden Eigenschaften von $d_{\det(A)}$ haben.

$\to$ 1).

2) folgt direkt aus

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) \overset{1)}{=} \det(A\cdot A^{-1}) = \det(E_n) = 1.$$

und 3)

$$\det(AB) \overset{1)}{=} \det A\cdot\det B = \det B\cdot\det A \overset{1)}{=} \det(BA).$$

Für 3) erinnere man sich, dass

$$A_{BB} = W_B^{-1} A W_B$$

also

$$\det(A_{BB}) = \det(W_B^{-1} A W_B) \overset{3)}{=} \det(A W_B W_B^{-1}) = \det(A)$$ ↲

⚠ $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ ⚠

Die Existenz für 2x2 Matrizen haben wir ja schon gemacht: Dass die Funktion

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \gamma \cdot (ad - bc)$$

wirklich die Eigenschaften 1) - 3) aus dem Theorem hat ist eine leichte, aber etwas nervige Rechnung.

Für 3x3-Matrizen gibt es die Sarrus-Formel:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - afh - bdi$$

am besten schematisch geschrieben als

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

Bsp.:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 45 + 84 + 96 \\ - 105 - 72 - 48 \end{matrix}$$

$$= 225 - 225 = 0$$

Wir wussten ja auch schon dass

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

Im allgemeinen gilt aber nicht

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & \vdots & \\ m & n & o & k \end{pmatrix} = \quad - \quad$$

da diese Formel Eigenschaft 4) nicht erfüllt für $n \geq 3$.

Statt dessen gilt Leibniz' Formel:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1,\pi_1} a_{2,\pi_2} \cdots a_{n,\pi_n}$$

wobei $\mathcal{S}_n = \left\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \;\middle|\; \pi \text{ ist eine Aufzählung von } \{1, \ldots, n\} \right\}$

"Permutation".

und $\sigma(\pi)$ ist die Anzahl der Vertauschungen die man vornehmen muss, wenn man $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ in $(1, \ldots, n)$ überführen will; man braucht:

Prop Die Parität von $\sigma(\pi)$ ist unabhängig von den Vertauschungen die man durchführt.

$\rightsquigarrow$ $(-1)^{\sigma(\pi)}$ ist wohl definiert für jedes π.

Der Beweis ist anstrengendes Nachrechnen, wie auch der von Leibniz' Formel.

Bsp: Für $n=2$:

$\Sigma_2 = \{(1,2), (2,1)\}$, $\quad \sigma(1,2) = 0$,
$\sigma(2,1) = 1$

$$\rightsquigarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\Sigma_3 = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

mit $\sigma(\pi) = 0, 1, 1, 2, 2, 3$

$$\rightsquigarrow \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Für $n=4$ hat diese Formel aber 24 (und nicht 8) Terme, für $n=5$ schon 120 und bei $n=6$ gar 720!

Man sieht also direkt:

Cor · $\det(A) = \det(A^T)$

· A obere oder untere Dreiecksmatrix
$\Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

⇝ können Determinanten mittels Gauß-Jordan berechnen:

- Multiplizieren einer Zeile mit λ
  ⇝ det wird mit λ multipliziert
- Addieren des Vielfachen einer Zeile auf eine andere
  ⇝ det bleibt gleich
- Vertauschen aufeinander folgender Zeilen
  ⇝ det wird mit $\cdot(-1)$ multipliziert
- det (Zeilenstufenform) = Produkt der Diagonaleinträge.

Bsp:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = -3.$$

Nützlich ist auch die <u>Laplace'sche Entwicklungsformel</u>: Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

Das Vorzeichen stand in der VL falsch an der Tafel!

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^{+}_{ji})$$

wo $A^{+}_{ji} \in \mathrm{Mat}(n-1, n-1)$ aus A durch Streichen der j-ten Zeile und $i$ten Spalte entsteht.

Das gleiche gilt für Spaltenentwicklung:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{+}_{ij}).$$

<u>Bsp:</u>

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -3 + 6 - 6 = -3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \\ 10 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 0 \\ 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \cdot (-1)^5 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= 30.$$

Nun zurück zu Eigenwerten: Für $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ ist

$$\lambda \longmapsto \det(\lambda \cdot E_n - A)$$

ein Polynom n-ten Grades mit Startterm λ^n; das folgt direkt aus Leibniz Formel.

__Def__ Dies Polynom heißt __charakteristisches Polynom__ von A, P_A

__Cor__ Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von P_A.

__Bsp__ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_A = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$

$\rightarrow$ A hat keine Eigenwerte.